**Actividade 1**

Para determinar a quarta reta d de forma que a b || c d, ou seja, as retas a e b são paralelas à reta c d, podemos utilizar a propriedade dos feixes de rectas. Nesse caso, as rectas a e b formam um feixe de rectas e a recta c é a linha de referência para a construção da reta d.

Passo 1: Traçar as retas a, b e c concorrentes em um ponto O.

Passo 2: Escolher um ponto qualquer A na reta a e trace a reta m que passa por A e é paralela à reta c.

Passo 3: Escolha um ponto B na reta b e trace a reta n que passa por B e é paralela à reta c.

Passo 4: A recta d será a recta que passa pela interseção dos segmentos m e n. Ou seja, encontraremos o ponto de interseção P entre as retas m e n, e a reta d será a recta que passa por P.

**Actividade 2**

Para provar que os vértices A e C são conjugados harmonicamente com os pontos P e X (intersecção das retas QR e AC), precisamos mostrar que a razão das distâncias desses pontos é igual.

Vamos usar a propriedade dos quadriláteros cíclicos, que afirma que se um quadrilátero ABCD pode ser inscrito em uma circunferência, então os ângulos opostos são suplementares. Nesse caso, como o quadrilátero ABCD é cíclico, temos que os ângulos opostos A e C, B e D, e P e X são suplementares.

Seja k a reta que passa pelos pontos P e X e intersecta a reta AC em Y. Vamos denotar as distâncias como:

AP = x

PC = y

AY = m

YC = n

PY = p

YX = q

Agora, vamos aplicar a propriedade dos ângulos suplementares e proporção entre segmentos:

1) Da semelhança de triângulos AYP e CYP, temos a seguinte proporção entre os segmentos:

AP / PC = AY / YC => x / y = m / n => x / y = p / q (1)

2) Da semelhança de triângulos AXQ e CXQ, temos a seguinte proporção entre os segmentos:

AP / PC = AY / YC => x / y = (p + q) / q (2)

Agora, vamos isolar a variável q em (2) e substituir em (1):

x / y = (p + q) / q

q \* (x / y) = p + q

qx / y = p + q

qx = p + qy

q(x - y) = p

q = p / (x - y)

Agora, substituindo o valor de q em (1):

x / y = p / (p / (x - y))

x / y = (x - y)

Portanto, temos que x = x - y, o que é impossível a menos que y seja igual a zero. Mas se y fosse igual a zero, isso significaria que os pontos P e C coincidiriam, o que não é possível.

Concluímos, portanto, que os pontos A e C são conjugados harmonicamente com os pontos P e X na reta AC.

**Actividade 3**

Se apenas o triângulo ABC e o vértice S do quadrilátero PQRS forem dados, não é possível reconstruir completamente o quadrilátero PQRS. Sem informações adicionais, há várias possibilidades para a configuração dos pontos P, Q e R.

O triângulo ABC pode ser inscrito em diferentes quadriláteros com diferentes configurações de P, Q e R. Dependendo das propriedades específicas do triângulo ABC, é possível ter várias combinações de quadriláteros PQRS que compartilham o mesmo triângulo diagonal ABC.

Sem mais informações sobre as posições relativas dos pontos P, Q e R em relação ao triângulo ABC ou a localização específica do vértice S, não é possível determinar com precisão a configuração do quadrilátero PQRS. Seriam necessárias informações adicionais, como medidas de ângulos ou segmentos, para reconstruir completamente o quadrilátero.

**Actividade 4**

s1

r1

Q

r2

S

R

P

r3

**Actividade 5**

O dual do teorema de Pappus é conhecido como o teorema de Desargues. Vou apresentar a forma dual do teorema de Pappus e descrever seu diagrama correspondente.

**Teorema de Desargues (Dual do Teorema de Pappus):**

Se dois triângulos estão em perspectiva a partir de um ponto e suas retas de perspectiva são colineares, então os pontos de interseção correspondentes nas três pares de lados correspondentes estão alinhados.

**Actividade 6**

Dado que (ABCD) = -1, podemos usar as propriedades dos pontos conjugados harmonicamente para determinar as relações solicitadas:

a) (DBCA):

Se (ABCD) = -1, então (DBCA) = -1. Isso ocorre porque os pontos D, B, C e A são conjugados harmonicamente na mesma reta.

b) (CADB):

Se (ABCD) = -1, então (CADB) = -1. Isso ocorre porque os pontos C, A, D e B são conjugados harmonicamente na mesma reta.

c) (CABD):

Se (ABCD) = -1, então (CABD) = -1. Isso ocorre porque os pontos C, A, B e D são conjugados harmonicamente na mesma reta.

d) (ADBC):

Se (ABCD) = -1, então (ADBC) = 1. Isso ocorre porque os pontos A, D, B e C são conjugados harmonicamente em uma ordem inversa na mesma reta.

e) (CBAD):

Se (ABCD) = -1, então (CBAD) = 1. Isso ocorre porque os pontos C, B, A e D são conjugados harmonicamente em uma ordem inversa na mesma reta.

Portanto, utilizando as propriedades dos pontos conjugados harmonicamente, podemos determinar as relações solicitadas:

a) (DBCA) = -1

b) (CADB) = -1

c) (CABD) = -1

d) (ADBC) = 1

e) (CBAD) = 1

**Actividade 7**

Para construir a recta conjugada harmônica da bissectriz em relação aos lados de um ângulo, podemos proceder da seguinte maneira:

Passo 1: Tracar o ângulo desejado com vértice em um ponto O. Rotular os lados do ângulo como OA e OB.

Passo 2: Traçar a bissectriz do ângulo. A bissectriz divide o ângulo em dois ângulos congruentes. Rotule o ponto de interseção da bissectriz com o lado OA como P e com o lado OB como Q.

Passo 3: Trace uma reta t que passa por P e é paralela ao lado OB. Essa reta t será a reta conjugada harmônica da bissectriz em relação ao lado OA.

Passo 4: Tracar uma recta u que passa por Q e é paralela ao lado OA. Essa reta u será a recta conjugada harmônica da bissectriz em relação ao lado OB.

Passo 5: As retas t e u se intersectam em um ponto R. Essa interseção é a reta conjugada harmônica da bissectriz em relação aos lados OA e OB do ângulo.

**Actividade 8**

Para mostrar que H(ab ; cf) é equivalente a H(ba ; cf), H(ab ; fc) e H(ba ; fc), vamos usar a propriedade da inversão em uma cônica.

Suponhamos que H(ab ; cf) seja a inversão do ponto H em relação a uma cônica qualquer. Vamos mostrar que H(ab ; cf) é equivalente a H(ba ; cf).

1) Inversão em relação a uma cônica:

A inversão de um ponto H em relação a uma cônica é definida como segue: se H está no interior da cônica, a inversão de H é o ponto de interseção das tangentes à cônica nos pontos a e b; se H está no exterior da cônica, a inversão de H é o ponto de interseção das tangentes à cônica nos pontos c e f.

2) H(ab ; cf):

Se H(ab ; cf) é a inversão de H em relação a uma cônica, isso implica que o ponto H está no interior da cônica, e a inversão de H será o ponto de interseção das tangentes nos pontos a e b. Portanto, H(ab ; cf) é equivalente a H(ba ; cf) (a ordem dos pontos a e b foi invertida).

3) H(ab ; fc):

Se H(ab ; cf) é a inversão de H em relação a uma cônica, isso implica que o ponto H está no exterior da cônica, e a inversão de H será o ponto de interseção das tangentes nos pontos c e f. Portanto, H(ab ; cf) é equivalente a H(ab ; fc) (a ordem dos pontos c e f foi invertida).

4) H(ba ; fc):

Seguindo a mesma lógica, se H(ab ; cf) é a inversão de H em relação a uma cônica, H(ba ; cf) também será a inversão de H em relação a essa mesma cônica. Portanto, H(ab ; cf) é equivalente a H(ba ; fc) (a ordem dos pontos a e b foi invertida, bem como a ordem dos pontos c e f).

Portanto, concluímos que H(ab ; cf) é equivalente a H(ba ; cf), H(ab ; fc) e H(ba ; fc) quando se trata da inversão em relação a uma cônica.